VISIT…

597

Государственный комитет СССР по народному образованию

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Т. В. БИДЕРМАН

Утверждены редсоветом МВТУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ВСЕСОЮЗНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО КУРСУ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Под редакцией А. Е. Белкина

Москва 1988

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом. Рассмотрены и одобрены кафедрой сопротивления материалов 11.12.87 г., методической комиссией факультета РК 24.02.88 г. и учебно-методическим управлением 15.04.88 г.

Рецензент д. т. н. проф. ВЗПИ В. А. Светлицкий

© Московское высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Задача I. Балка длиной ℓ (рис. I) нагружена так, что уравнение упругой линии в координатах yz имеет вид

$$y = y_0\left[1 - 3\left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{z}{\ell}\right)^3\right].$$

Установить нагрузку, действующую на балку.

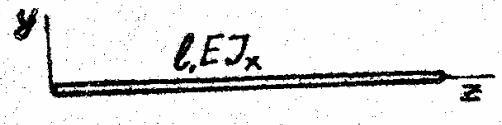


Рис. I

Задача 2. Определить закон изменения диаметра поперечного сечения по длине балки $d = f(z)$ равного сопротивления, показанной на рис. 2. Вычислить наибольший по абсолютному значению прогиб. Наибольший диаметр в заделке d_{max}, а также q, ℓ, E считать известными.

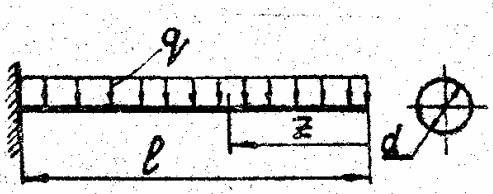


Рис. 2

Задача 3. Полоса I соединена с полосами 2 тремя заклепками 3 (рис. 3). Соединение нагружено растягивающей силой P. Как распределяется усилие между заклепками? Построить эпюры нормальных сил для полос I и 2. Деформации заклепок считать пренебрежимо малыми.

Задача 4. Балка (рис 4), имеющая изгибную жесткость EI_x, нагружена силой P. Средняя опора смещена так, что до нагружения между балкой и опорой имеется зазор $\Delta = \frac{1}{6}\frac{P\ell^3}{EI_x}$. Определить реакции опор и построить эпюру $M_{изг.}$.

Задача 5. Определить внутренние силы в стержнях AB и CD и угол поворота бруса OBD (рис. 5). Деформацию изгиба брусьев не учитывать.

Задача 6. Вал $ABCD$ жестко закреплен в сечении D и нагружен моментом M (рис. 6). В точках B и C к валу прикреплены рычаги BF и CH, концы которых соединены абсолютно гиб-

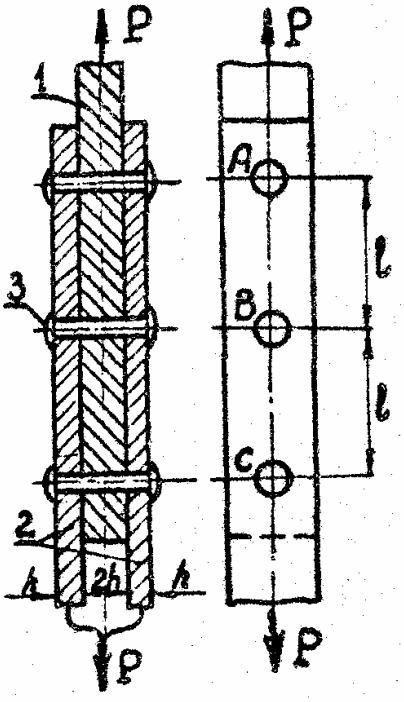


Рис. 3

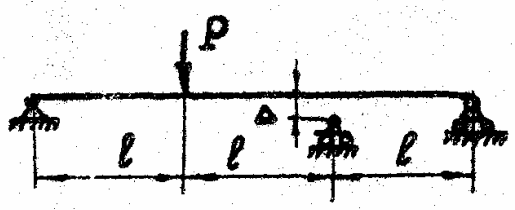


Рис. 4

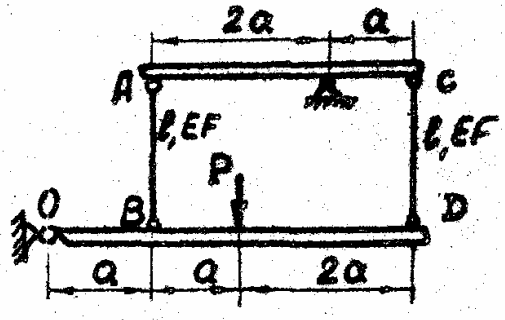


Рис. 5

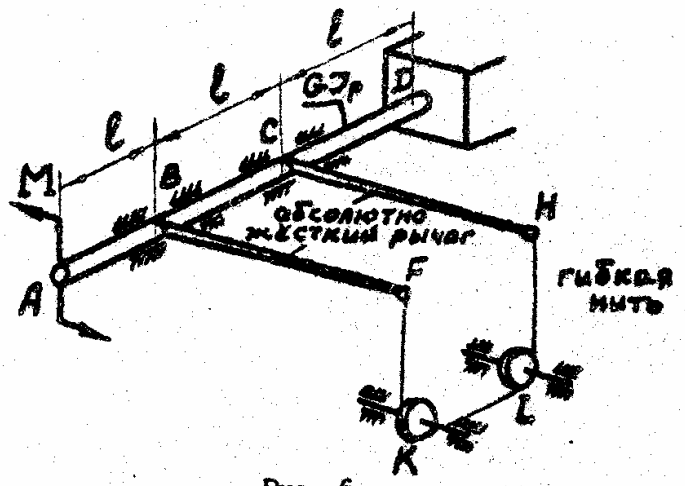


Рис. 6

кой, нерастяжимой нитью, перекинутой через блоки K и L. Построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$ к углов поворота φ для вала. Деформацией изгиба рычагов и трением в блоках пренебречь.

Задача 7. Обод колеса соединен со ступицей с помощью 12 спиц (рис.7). Определить усилия в спицах при приложении к ступице силы P . При расчете обод считать абсолютно жестким. Начальное натяжение спиц принять равным нулю.

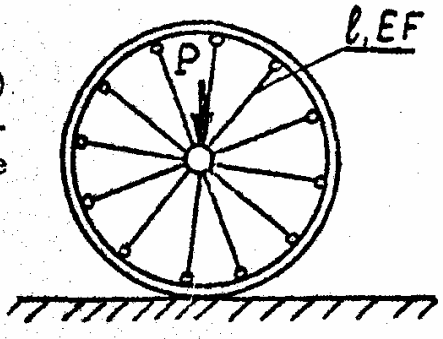


Рис. 7

Задача 8. Цилиндрическая витая пружина со средним диаметром D , навитая из проволоки диаметром d , надета на цилиндрический стержень с натягом δ (рис. 8). Определить момент M , который надо приложить к концам пружины, чтобы давление витков пружины на стержень обратилось в нуль. (Натягом называется разность между диаметром стержня и внутренним диаметром пружины.)

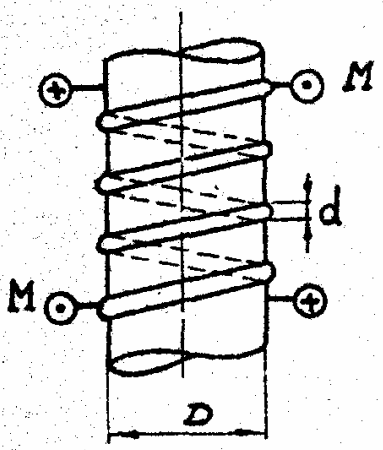


Рис. 8

Задача 9. Балка ABC (рис.9) жестко заделана в сечении A и поддерживается прикрепленной в точках B и C абсолютно гибкой нерастяжимой нитью, перекинутой через блоки T и S. Определить силу натяжения нити и построить эпюру изгибающих моментов M_x для балки.

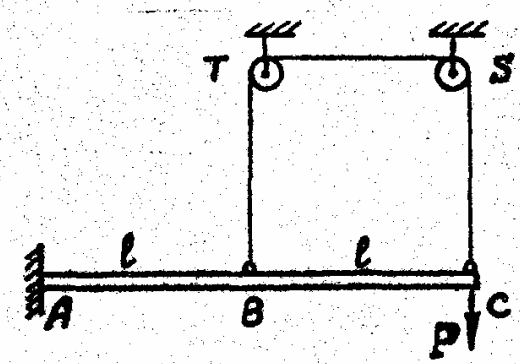


Рис. 9

Задача 10. Заделанные в плиту B стержни диаметром d без зазора входят в отверстия абсолютно жесткой плиты A , нагруженной моментом M в ее плоскости (рис. 10). Определить угол поворота плиты A при условии:

I) стержни могут поворачиваться в отверстиях плиты A;
2) стержни приварены к плите A.

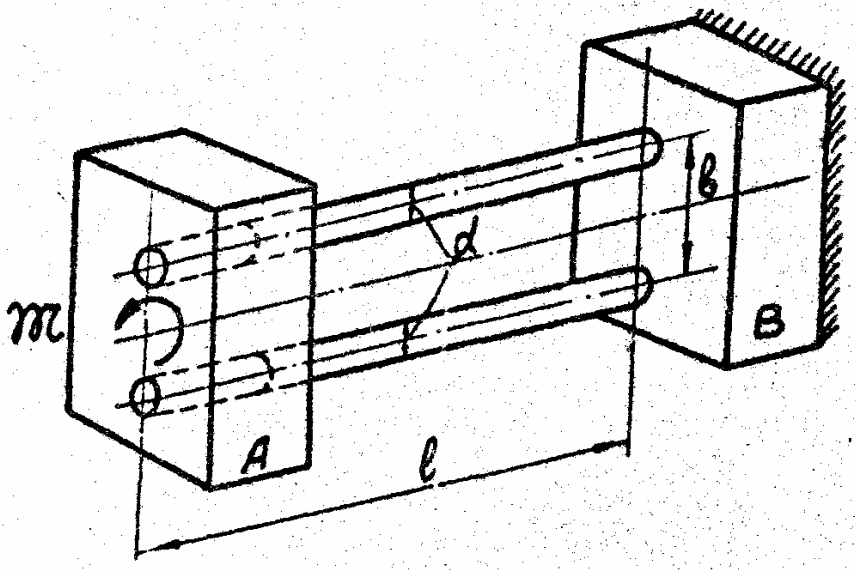


Рис. I0

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача I. Из дифференциального уравнения упругой линии $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI_x}$ при заданном y определяем $M_x = \frac{EI_x y_0}{l^2}\left(-6+12\frac{x}{l}\right)$.
Поперечная сила постоянна:

$$Q_y = \frac{dM_x}{dx} = 12\,\frac{EI_x y_0}{l^3}.$$

Нагружение балки, соответствующее этим уравнениям, показано на рис. II. Результат решения этой задачи можно использовать в задаче I0.

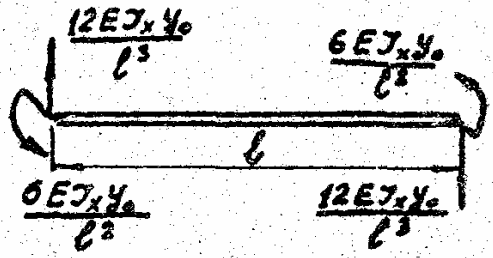


Рис. II

Задача 2. Балкой равного сопротивления называется балк во всех сечениях которой максимальные напряжения одинаковы.

Следовательно, напряжение в заделке $\sigma_{z=\ell}$ равно напряжению в текущем сечении σ_z :

$$\sigma_{z=\ell} = \frac{q\ell^2}{2\frac{\pi d_{max}^3}{32}}; \qquad \sigma_z = \frac{qz^2}{2\frac{\pi d^3}{32}}.$$

Отсюда $d = d_{max}\left(\frac{z}{\ell}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Максимальный прогиб определяем с помощью интеграла Мора

$$f_{max} = \int_0^\ell \frac{M_P M_1 dz}{EI} = \int_0^\ell \frac{\frac{qz^2}{2}\cdot 1\cdot z\cdot dz}{E\frac{\pi d_{max}^4}{64}\left(\frac{z}{\ell}\right)^{\frac{8}{3}}} = \frac{3}{8}\frac{q\ell^4}{EI_{max}},$$

где $I_{max} = \frac{\pi d_{max}^4}{64}$.

Задача 3. На участках AB и BC удлинения полос I и 2 и возникающие в них напряжения одинаковы. Полоса I воспринимает усилие $P/2$, а каждая из боковых полос $P/4$. Эпюры нормальных сил показаны на рис. I2. Крайние заклепки передают усилия $P/2$. Средняя заклепка не работает.

Задача 4. На рис. I3 показана эквивалентная система для раскрытия статической неопределимости заданной балки, а также эпюры изгибающих моментов от внешней силы $P(M_P)$ и от единичной силы M_1.

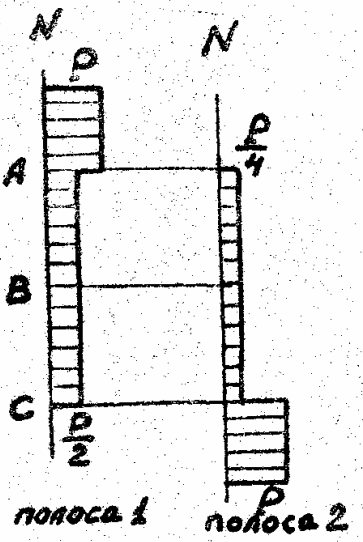


Рис. I2

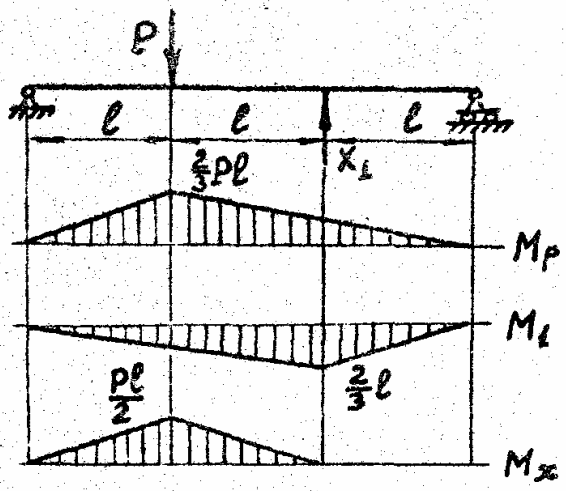


Рис. I3

Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{1P} = -\Delta,$$

где

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\ell\cdot 2\ell\right)\frac{4}{9}\ell + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\ell\cdot\ell\right)\frac{4}{9}\ell\right] = \frac{4}{9}\frac{\ell^3}{EI_x};$$

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EI_x}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}P\ell\cdot\ell\right)\frac{2}{9}\ell + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}P\ell\cdot\ell\right)\frac{4}{9}\ell + \left(\frac{1}{3}P\ell\cdot\ell\right)\frac{1}{2}\ell + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}P\ell\cdot\ell\right)\frac{4}{9}\ell\right] = -\frac{7}{18}\frac{P\ell^3}{EI_x}.$$

После подстановки получаем значение $x_1 = \frac{P}{2}$, с учетом которого эпюра изгибающих моментов M_x для заданной балки получает вид, показанный на рис. I3.

Задача 5. Данная задача – статически определимая. Из уравнений равновесия (рис. I4) верхнего бруса

$$N_1 2a - N_2 a = 0; \quad 2N_1 = N_2$$

и нижнего бруса

$$N_1 a + N_2 4a - P\cdot 2a = 0$$

следует, что $N_1 = \frac{2}{9}P; \quad N_2 = \frac{4}{9}P.$

Для нахождения угла поворота бруса OBD применим метод Мора. Приложим к брусу OBD единичный момент (рис. I5). Поскольку нагрузка приложена к абсолютно жесткому телу, то способ ее реализации значения не имеет, поэтому для определения сил можно воспользоваться известным решением от заданной нагрузки P: $\frac{N_1^1}{N_1^P} = \frac{1}{P\cdot 2a}$.

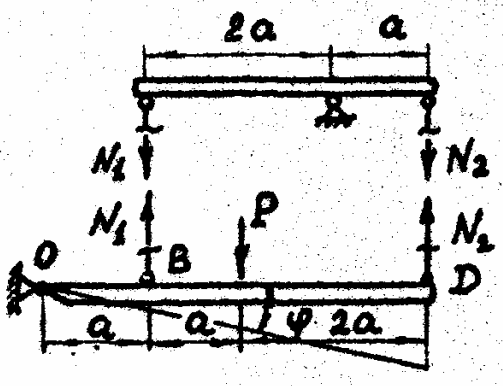


Рис. I4

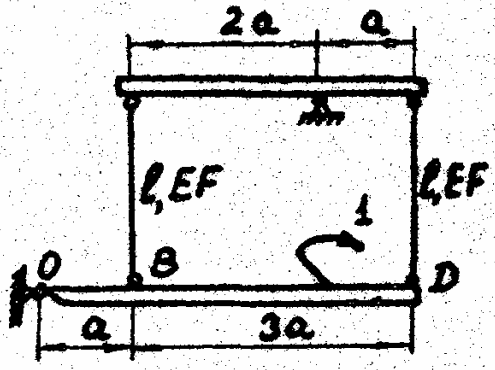


Рис. I5

Усилия в стержнях при действии единичного момента $N_1^1 = \frac{1}{9a}$; $N_2^1 = \frac{2}{9}a$. Искомый угол поворота

$$\varphi = \frac{N_1 N_1' \ell}{EF} + \frac{N_2 N_2' \ell}{EF} = \frac{\ell}{EF}\left(\frac{2}{9}P \cdot \frac{1}{9a} + \frac{4}{9}P \cdot \frac{2}{9a}\right) = \frac{10}{81}\frac{P\ell}{EF}.$$

Примечание. Можно найти угол поворота из условия равенства работы внешней силы и потенциальной энергии деформации системы:

$$A = U, \quad \frac{1}{2}P \cdot 2a \cdot \varphi = U.$$

Задача 6. В точках B и C на вал передаются одинаковые моменты X. Следовательно, $M_{кр_{BC}} = M - X$; $M_{кр_{CD}} = M - 2X$. Так как нить нерастяжимая, то точки H и F перемещаются во взаимно противоположных направлениях на одинаковую величину (рис. I6), отсюда $\varphi_c = -\varphi_B$. Подставляя в это уравнение значения углов поворота

Рис. I6

$$\varphi_c = \frac{(M-2X)\ell}{GJ_p}; \quad \varphi_B = \frac{(M-2X)\ell}{GJ_p} + \frac{(M-X)\ell}{GJ_p},$$

получаем

$$X = \frac{3}{5}M.$$

Эпюры крутящих моментов и углов поворота показаны на рис. I7.

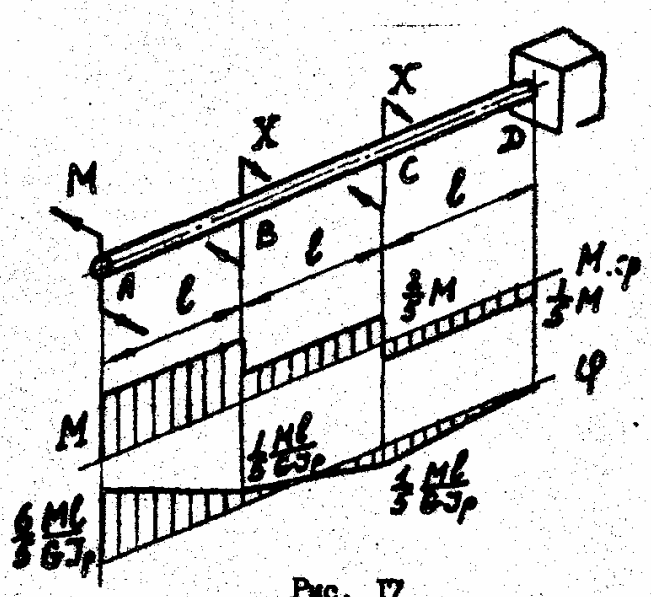


Рис. I7

Задача 7. Как известно*, вследствие симметрии системы перемещение центра колеса всегда направлено по силе P.

---

* См. задачу 2 в кн.: Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов.-М.: I973.-С. 75-76.

Это перемещение u не зависит от угла, составляемого силой с каждой из спиц (рис. I8). Поэтому примем углы равными $\alpha_i = \frac{2\pi}{6} i$, где $i = 1, 2, \ldots, 12$. Удлинение $\Delta l_i = \frac{N_i l}{EF}$. Уравнение равновесия ступицы: $-P + \sum_{i=1}^{12} N_i \cos\alpha_i = 0$.

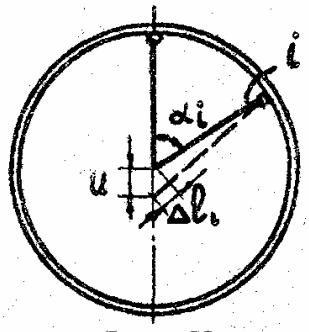


Рис. I8

Подставим в это уравнение усилие в i-й спице: $N_i = \frac{\Delta l_i EF}{l} = u \cos\alpha_i \frac{EF}{l}$,

откуда $u = \frac{Pl}{EF \sum_{i=1}^{12} \cos^2\alpha_i}$,

$$\sum_{i=1}^{12} \cos^2\alpha_i = \sum_{i=1}^{12} \frac{1+\cos 2\alpha_i}{2} = 6,$$

где $\sum_{i=1}^{12} \cos\frac{\pi}{3} i = 0$.

Следовательно,

$$u = \frac{Pl}{6EF}.$$

Таким образом, усилие в i-й спице

$$N_i = \frac{Pl}{6EF} \cos\alpha_i \frac{EF}{l} = \frac{P}{6} \cos\alpha_i.$$

Максимальное усилие возникает в спице, когда ее направление совпадает с направлением силы ($\cos\alpha_i = 1$) $N_{max} = \frac{P}{6}$.

Задача 8. Кривизна витков пружины в свободном состоянии

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{D/2} = \frac{2}{D}.$$

Кривизна витков после надевания пружины на стержень

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\frac{D+\delta}{2}} = \frac{2}{D+\delta}.$$

Изменение кривизны

$$\Delta\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{D} - \frac{2}{D+\delta} = \frac{2\delta}{D(D+\delta)}.$$

Так как $\delta \angle\angle D$, то $\Delta\frac{1}{\rho} \approx \frac{2\delta}{D^2}$.

Это изменение кривизны должно быть компенсировано изгибающим моментом. Из теории изгиба $\Delta\frac{1}{\rho} = \frac{M_{изг.}}{EI_x}$.

Отсюда момент

$$M_{изг} = \Delta \frac{1}{\rho} EI_x = \frac{2\delta EI_x}{D^2},$$

где $I_x = \frac{\pi d^4}{64}$.

Задача 9. В точках B и C на балку передаются силы X натяжения нити (рис. I9).

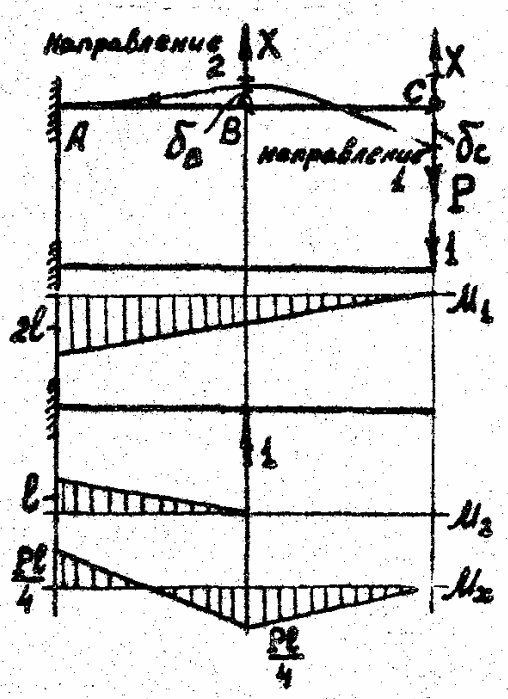


Рис. I9

Так как нить нерастяжимая, то перемещение δ_c точки C вниз (направление I) равно перемещению δ_B точки B вверх (направление 2), т.е. $\delta_c = \delta_B$.

где $\delta_{11}(P-X) + \delta_{12}X = \delta_{21}(P-X) + \delta_{22}X,$ (и)

$$\delta_{11} = \frac{8l^3}{3EI_x};$$

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{3EI_x};$$

$$\delta_{1P} = -\frac{\frac{1}{2}l^2 \cdot \frac{5}{3}l}{EI_x} = -\frac{5}{6}\frac{l^3}{EI_x}.$$

Уравнение (и) после сокращения на l^3/EI_x примет вид

$$\frac{8}{3}(P-X) - \frac{5}{6}X = -\frac{5}{6}(P-X) + \frac{1}{3}X$$

или $\frac{21}{6}P = \frac{14}{3}X$.

Откуда $X = \frac{3}{4}P$.

Эпюра изгибающих моментов M_x для заданной балки показана на рис. 19.

Задача 10. 1) При повороте плиты А (см. рис. 10) на угол φ торцы стержней, нагруженные, как показано на рис. 20, получают смещение $y_0 = \varphi\frac{b}{2}$, причем концы стержней остаются параллельными. Каждый стержень деформируется в соответствии со схемой, показанной на рис. 21. Прогиб, определенный по правилу Верещагина, составляет $y_0 = \frac{Ql^3}{12EI}$. (Можно воспользоваться решением задачи 1.)

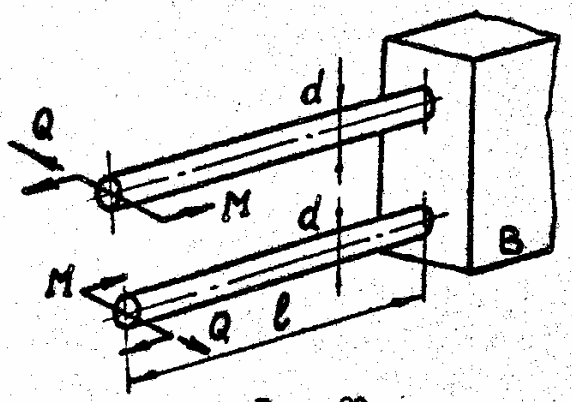


Рис. 20

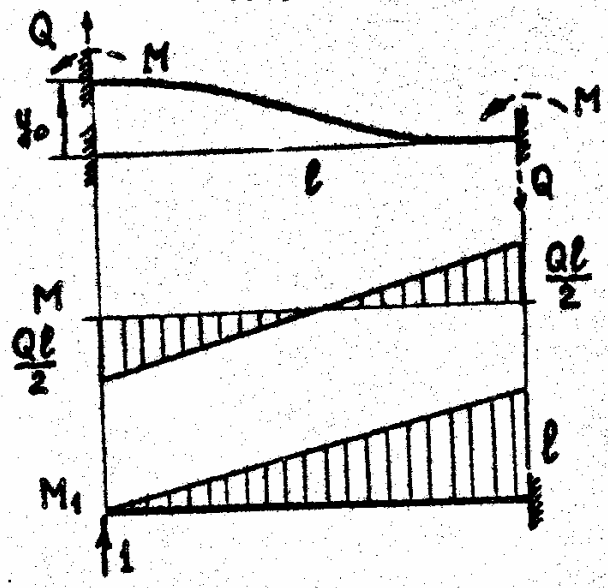


Рис. 21

Из условия равновесия плиты А (рис. 22а)

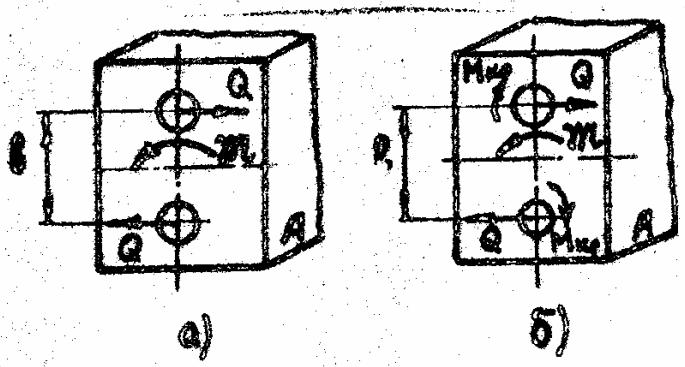
$$M = Qb = 12\frac{EI}{l^3}\cdot\varphi\cdot\frac{b^2}{2}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{Ml^3}{6EIb^2},$$

где

$$I = \frac{\pi d^4}{64}.$$



а) б)

Рис. 22

2) В данном случае, кроме изгиба, стержни закручиваются на угол φ, причем в них возникают крутящие моменты

$$M_{кр} = \varphi\frac{GI_\rho}{l},$$

где

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Из условия равновесия плиты А (рис. 22б) следует, что

$$M = Qb + 2M_{кр} = 12\frac{EI_\rho}{l^3}\varphi\cdot\frac{b^2}{2} + 2\frac{GI_\rho}{l}\varphi,$$

откуда

$$\varphi = \frac{M}{\frac{6EIb^2}{l^3} + \frac{2GI_\rho}{l}}.$$

МВТУ
им. Н. Э. Баумана
БИБЛИОТЕКА

Татьяна Вадимовна Бидерман

Редактор О.М.Королева Корректор Л.И.Малютина

Заказ 804 Объем 0,75 п.л. (0,7уч.-изд.л.) Тираж 400 экз.
Бесплатно. Подписано в печать 20.05.88 г. План 1988г., № 88.

Типография МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.